Задачи №4 и №5. Задача №41 на другом листе

Выполнил студент 412 группы Зацепин Андрей

Формулировка задачи №4: Пусть пуассоновский процесс $\{X_t, t \in [0,\infty)\}$ определен на вероятностном пространстве(Ω, F, P). Обозначим τ_n длину интервала между n-ным и $n-1$-ым скачками траектории пуассоновского процесса, $n \in N$, где $n_0 = 0$. Доказать, что все случайные величины $\tau_n, n \in N$, имеют общее экспоненциальное распределение.

Формулировка задачи №5: Пусть пуассоновский процесс $\{X_t, t \in [0,\infty)\}$ определен на вероятностном пространстве(Ω, F, P). Обозначим τ_n длину интервала между n-ным и $n-1$-ым скачками траектории пуассоновского процесса, $n \in N$, где $n_0 = 0$. Доказать, что все случайные величины $\tau_n, n \in N$, независимы.

Доказательство. Доказывать будем оба утверждения вместе, воспользовавшись определением пуассоновского процесса и аппаратом характеристических функций. Рассмотрим случайную величину τ_0. Для нее, очевидно, в силу определения пуассоновского процесса

$$P(\tau_0 < t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}, \text{ следовательно } \; P(\tau_0 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Рассмотрим теперь τ_1. Нас интересует событие: $\{\tau_0 > t_0, \tau_0 + \tau_1 > t_1\}$. Найдем его вероятность:

$$P(\tau_0 > t_0, \tau_0 + \tau_1 > t_1) = P(X_{t_0} = 0, X_{t_1} = 0) + P(X_{t_0} = 0, X_{t_1} = 1) =$$

$$= P(X_{t_0} = 0, X_{t_1} - X_{t_0} = 0) + P(X_{t_0} = 0, X_{t_1} - X_{t_0} = 1) =$$

$\{$так как события $X_{t_0} = 0$ и $X_{t_1} - X_{t_0} = 0$, $X_{t_0} = 0$ и $X_{t_1} - X_{t_0} = 1$ независимы$\} =$

$$= P(X_{t_0} = 0) \cdot P(X_{t_1} - X_{t_0} = 0) + P(X_{t_0} = 0) \cdot P(X_{t_1} - X_{t_0} = 1) =$$

$$e^{-\lambda t}\left[e^{-\lambda(t_1 - t_0)} + \frac{\lambda(t_1 - t_0)}{1!} e^{-\lambda(t_1 - t_0)}\right].$$

Далее,

$$P(\tau_0 \leq t_0, \tau_0 + \tau_1 \leq t_1) = P(\tau_0 \leq t_0) - P(\tau_0 \leq t_0, \tau_0 + \tau_1 \geq t_1) =$$

$$= P(\tau_0 \leq t_0) - P(\tau_0 + \tau_1 > t_1) + P(\tau_0 > t_0, \tau_0 + \tau_1 > t_1).$$

Тогда получаем, что совместная плотность вероятности $\tau_0, \tau_0 + \tau_1$

$$p(t_0, t_1) = \frac{d^2}{\partial t_0 \partial t_1} P(\tau_0 \leq t_0, \tau_0 + \tau_1 \leq t_1) = \lambda^2 e^{-\lambda t_1}, \text{ при } \; t_0 < t_1$$

$$0, \text{ иначе.}$$

Положим $u, v \in \mathbb{R}$ и найдем:

$$\mathbb{E}e^{iu\tau_0 + iv\tau_1} = \mathbb{E}e^{i(u-v)\tau_0 + iv(\tau_0 + \tau_1)} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-v)t_0+ivt_1} p(t_0,t_1)dt_0dt_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{t_1} e^{i(u-v)t_0+ivt_1}\lambda^2 e^{-\lambda t_1}dt_0dt_1 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{(\lambda-iu)(\lambda-iv)} = \mathbb{E}e^{iu\tau_0+iv\tau_1},$$

здесь мы учли, что

$$\mathbb{E}e^{iu\tau_0} = \int\limits_0^{\infty} e^{iut_0} p_{\tau_0}(t_0)dt_0 = \frac{\lambda}{\lambda-iu},\ \text{где}\ p_{\tau_0}(t_0) = \lambda e^{-\lambda t_0}.$$

Имеем, если $v = 0$, то

$$\mathbb{E}e^{iu\tau_0} = \frac{\lambda}{\lambda-iu}$$

если $u = 0$, то

$$\mathbb{E}e^{iv\tau_1} = \frac{\lambda}{\lambda-iv}.$$

Получили, что

$$\mathbb{E}e^{iu\tau_0+iv\tau_1} = \mathbb{E}e^{iu\tau_0}\cdot\mathbb{E}e^{iu\tau_1}$$

и согласно критерию случайные величины τ_0 и τ_1 независимы(*тем самым проведено доказательство задачи №5*, так как аналогичными утверждениями можно доказать независимость всех длин интервалов), а в силу вида характеристических функций случайных величин τ_0 и τ_1 и взаимооднозначного соответствия между распределениями и характеристическими функциями, заключаем, что они имеют экспоненциальное распределение(*тем самым доказали утверждение задачи №4*).